Année académique 2023–2024

PHYS-F432 – THÉORIE DE LA GRAVITATION

– Dernière séance d'exercices –

`métrique de Schwarzschild & trous noirs`

Les corrections sont intercalées entre les énoncés et entourées d'un cadre similaire à celui-ci. Nous omettons de reproduire les corrections de certains exercices complémentaires (ou de certaines parties d'exercices) marqués d'une étoile (*). Si discuter de la résolution de l'un de ces problèmes vous intéresse, venez directement me trouver !

Exercice 1 : vers le trou noir. Soit un observateur massif en chute libre vers un trou noir de Schwarzschild. On se place dans le cas parabolique (c'est-à-dire $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\tau \to 0$ quand $r \to +\infty$). En outre, on suppose que l'observateur n'a pas de vitesse angulaire.

a. Déterminer les constantes a et b dans les équations du mouvement obtenues lors de la séance précédente.

Correction. Les équations du mouvement obtenues à partir des symétries du problème sont (*cf.* séance précédente) :

$$-e^{\nu}\dot{t}^2 + e^{-\nu}\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 = \eta, \tag{1a}$$

$$r^2\dot{\phi} = a, \tag{1b}$$

$$e^{\nu}\dot{t} = b, \tag{1c}$$

où $\dot{}$ dénote une dérivée par rapport au temps propre. Puisque l'on suppose le mouvement purement radial, on doit avoir $\dot{\phi} = 0$, c'est-à-dire $a = 0$ dans l'équation (1b).
D'autre part, en réécrivant l'équation (1c) comme

$$\dot{t} = be^{-\nu}$$

et en injectant ce résultat dans (1a), on obtient

$$\dot{r}^2 = b^2 - e^{\nu} = b^2 - 1 + \frac{2M}{r}.$$

Ici, on a choisit $\eta = -1$ puisque qu'on considère le mouvement d'un observateur massif (géodésique de genre temps). On veut que le mouvement soit parabolique, c'est-à-dire $\dot{r} \to 0$ quand $r \to +\infty$. Vu l'équation précédente, et puisque $e^{\nu} \to 1$ quand $r \to +\infty$, on doit avoir $b^2 = 1$. En outre, comme on considère un mouvement est orienté vers le futur ($\dot{t} > 0$), on choisit $b = +1$. Notons finalement que l'équation (1a) se réduit finalement à

$$\boxed{\dot{r}^2 = \frac{2M}{r}.} \tag{2}$$

b. On note τ le temps propre le long de la trajectoire de l'observateur. Sachant que l'observateur part de r_0 en $\tau = 0$, calculer le temps propre en fonction de la distance radiale $\tau(r)$.

> ***Correction.*** Puisque l'observateur se rapproche du trou noir, on réécrit (2) comme
>
> $$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} = -\sqrt{\frac{2M}{r}}.$$
>
> Cette équation se sépare comme
>
> $$\mathrm{d}\tau = -\frac{\mathrm{d}r\sqrt{r}}{\sqrt{2M}}.$$
>
> En notant $r_0 \equiv r(\tau = 0)$, on obtient l'expression souhaitée :
>
> $$\boxed{\tau(r) = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{M}}\left(r^{3/2} - r_0^{3/2}\right).} \tag{3}$$

c. Montrer qu'en partant d'une distance radiale finie, on atteint $r = 2M$ en un temps propre fini.

> ***Correction.*** En utilisant directement (3), on voit que
>
> $$\tau(r = 2M) = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{M}}\left(r_0^{3/2} - (2M)^{3/2}\right),$$
>
> qui est fini si r_0 est fini.

d. Montrer que $t \to \infty$ pour $r \to 2M$.

> ***Correction.*** Partons de l'équation (1c), qui se réduit ici à
>
> $$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = e^{-\nu}.$$
>
> Le temps (coordonnée) t qui s'écoule lorsque l'observateur se déplace entre deux positions radiales r_0 et r_1 est donné par
>
> $$\begin{aligned} t &= \int \mathrm{d}t \\ &= \int_{r_0}^{r_1} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}r \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2M}}\int_{r_0}^{r_1} \frac{r^{3/2}\mathrm{d}r}{r - 2M}. \end{aligned}$$

Cette intégrale est manifestement divergente pour $r_1 \to 2M$. Par conséquent, puisqu'on peut interpréter le temps coordonnée t comme le temps propre d'un observateur (statique) situé asymptotiquement loin du trou noir, un tel observateur ne voit jamais l'observateur en chute libre atteinte l'horizon des événements $r = 2M$ du trou noir.

e. Montrer qu'on atteint la singularité $r = 0$ en un temps propre fini.

Correction. Encore une fois, en utilisant directement (3), on voit que

$$\tau(r=0) = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{M}}r_0^{3/2},$$

qui est fini si r_0 est fini.

f. L'observateur envoie régulièrement des signaux vers un autre observateur situé loin de l'étoile. Calculer $\Delta t_{\text{réception}}$ en fonction de $\Delta\tau_{\text{émission}}$. Calculer le décalage des fréquences (redshift). Que se passe-il pour $r \to 2M$?

Correction. Si on suppose que $\Delta t_{\text{réception}}$ et $\Delta\tau_{\text{émission}}$ ne sont pas trop grands, on a, en utilisant (1c)

$$\frac{\Delta t_{\text{réception}}}{\Delta\tau_{\text{émission}}} = e^{-\nu}.$$

Or puisque $\nu \propto (\Delta t)^{-1}$, on obtient

$$\nu_{\text{réception}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\nu_{\text{émission}}.$$

Par conséquent, si l'observateur en chute libre est très loin de l'horizon (c-à-d si $r \gg 2M$), on a $\nu_{\text{réception}} \simeq \nu_{\text{émission}}$ (redshift nul). En revanche, pour $r \to 2M$, on a $\nu_{\text{réception}} \to 0$. Lorsque l'observateur en chute libre s'approche de l'horizon, les signaux reçus par l'observateur asymptotique sont de plus en plus décalés, et finissent même par arrêter d'être reçus (redshift infini).

Exercice 2 : Global Positioning System (GPS). Le système GPS est composé de vingt-quatre satellites munis d'horloges atomiques circulant autour de la Terre et qui transmettent en continu le temps indiqué par leurs horloges internes et leurs positions aux récepteurs situés au sol. En analysant les signaux de quatre satellites, un récepteur peut déterminer avec précision (environ 25m) sa position sur Terre pour autant que son horloge interne soit synchronisée avec celle des satellites.

La manière dont le système fonctionne est la suivante : le récepteur GPS reçoit un signal en provenance de chaque satellite visible lui indiquant la position x^i de ce dernier et le temps t auquel ledit signal a été émis. Le récepteur trace ensuite (virtuellement, bien entendu) une sphère centrée en x^i et de rayon ct. En utilisant les signaux émis pas trois satellites, le récepteur peut déterminer sa position (l'intersection de trois sphères, si elle existe, est généralement composée de deux points dont un peut être rejeté puisqu'on sait qu'on est situés sur la surface de la Terre). Le quatrième signal sert à plus de précision.

Pour que ce système fonctionne correctement, il faut que les différentes horloges soient synchronisées entre-elles. Or on sait qu'en différents points du champs gravitationnel le temps s'écoule différement. On va montrer que les corrections de la relativité générale se doivent d'être prises en compte pour ce faire. Plus précisément, on va regarder comment les horloges se « désynchronisent » à cause du champ de gravitation.

a. Les satellites ont des orbites circulaires ayant une période de 12h. Calculer le rayon de l'orbite et la vitesse des satellites en utilisant les lois de la mécanique Newtonienne. On montrera plus tard que cette approximation est justifiée. Pour rappel, la masse de la Terre est de $m_\oplus = 5,98\,10^{24}$kg et $G = 6,67\,10^{-11}\mathrm{Nm}^2/\mathrm{kg}^2$.

> ***Correction.*** L'accélération d'un satellite en orbite circulaire est purement centripète. On peut donc écrire
>
> $$\frac{v^2}{r} = \frac{Gm_\oplus}{r^2}.$$
>
> Or la vitesse du satellite est donnée par
>
> $$v = \frac{2\pi r}{T},$$
>
> où T est sa période de révolution. Par conséquent, le rayon de son orbite est
>
> $$r = \sqrt[3]{\frac{Gm_\oplus T^2}{4\pi^2}} \simeq 2,6 \cdot 10^7\mathrm{m}.$$
>
> Sa vitesse est quant à elle
>
> $$v \simeq 1,3 \cdot 10^{-5} c \ll c.$$

b. En utilisant la métrique de Schwarzschild, obtenir une expression pour $\mathrm{d}\tau_{\mathrm{sat}}/\mathrm{d}\tau_\oplus$ où $\mathrm{d}\tau_{\mathrm{sat}}$ et $\mathrm{d}\tau_\oplus$ sont les temps propres qui s'écoulent pendant un même intervalle de temps $\mathrm{d}t$ pour un observateur situé à l'infini. Utiliser $(1+d)^n = 1 + nd + \ldots$ pour écrire le rapport sous la forme

$$\mathrm{d}\tau_{\mathrm{sat}}/\mathrm{d}\tau_\oplus = 1 + b + \ldots$$

> ***Correction.*** Dans notre situation, on peut considérer que $\mathrm{d}r = \mathrm{d}\theta = 0$. Pour simplifier les expressions obtenues, on va considérer que $\theta_{\mathrm{sat}} = \theta_\oplus = \pi/2$. En

utilisant la métrique de Schwarzschild, on obtient donc

$$\mathrm{d}\tau^2 = \left(1 - \frac{2m_\oplus}{r}\right)\mathrm{d}t^2 - r^2\mathrm{d}\phi^2.$$

Ainsi, puisque $v_i = r_i \frac{\mathrm{d}\phi_i}{\mathrm{d}t}$ ($i = \text{sat}, \oplus$), on peut obtenir

$$\frac{\mathrm{d}\tau_i}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\left(1 - \frac{2m_\oplus}{r_i}\right) - v_i^2}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\tau_{\text{sat}}}{\mathrm{d}\tau_\oplus} &= \frac{\sqrt{1 - \frac{2m_\oplus}{r_{\text{sat}}} - v_{\text{sat}}^2}}{\sqrt{1 - \frac{2m_\oplus}{r_\oplus} - v_\oplus^2}} \\ &\simeq 1 \underbrace{- \frac{m_\oplus}{r_{\text{sat}}} + \frac{m_\oplus}{r_\oplus} - \frac{v_{\text{sat}}^2}{2} + \frac{v_\oplus^2}{2}}_{\equiv b} + \dots\end{aligned}$$

c. Rétablir les constantes G et c pour que les termes de la correction b soient sans dimension.

Correction. Deux types de termes interviennent dans l'expression de la correction b. Il nous faut rajouter les bonnes puissances de c et G pour que ces termes soient également adimensionnels :

- Pour les corrections du type $v^2/2$, il est clair qu'il suffit de les remplacer par

  $$\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2,$$

  puisque c a les dimensions d'une vitesse.
- Les corrections du type m/r nécessitent un peu plus d'attention…soient α, β tels que

  $$\frac{m}{r}G^\alpha c^\beta$$

  soit sans dimensions. On doit donc avoir

  $$\begin{aligned}&\frac{M}{L}\left(\frac{L^3}{MT^2}\right)^\alpha \left(\frac{L}{T}\right)^\beta = 1 \\ \Leftrightarrow &M^{1-\alpha}L^{3\alpha+\beta-1}T^{-2\alpha-\beta} = 1,\end{aligned}$$

  ce qui fixe $\alpha = 1$ et $\beta = -2$.

Au final, on a donc

$$b = \frac{m_\oplus G}{c^2}\left(\frac{1}{r_\oplus} - \frac{1}{r_{\text{sat}}}\right) + \frac{1}{2c^2}\left(v_\oplus^2 - v_{\text{sat}}^2\right).$$

d. Évaluer b en supposant qu'on peut négliger les vitesses $v = r\frac{d\phi}{dt}$ des observateurs. La correction obtenue est uniquement due à aux positions différentes des horloges dans le champ de gravitation. Quel est le décalage entre $\mathrm{d}\tau_{\mathrm{sat}}$ et $\mathrm{d}\tau_{\oplus}$ dû à cette correction après une journée ?

> ***Correction.*** En effectuant cette approximation, nous trouvons
>
> $$b = \frac{m_{\oplus}G}{c^2}\left(\frac{1}{r_{\oplus}} - \frac{1}{r_{\mathrm{sat}}}\right) \simeq 5,288 \cdot 10^{-10}.$$
>
> Après $\Delta\tau_{\oplus} = 24\mathrm{h}$, le décalage entre les horloges sur Terre et dans le satellite est donné par
>
> $$\Delta\tau_{\mathrm{sat}} - \Delta\tau_{\oplus} = b\Delta\tau_{\oplus} \simeq 4,569 \cdot 10^{-5}\mathrm{s}.$$

e. Évaluer b en tenant compte des vitesses des observateurs. Quel est le décalage entre $\mathrm{d}\tau_{\mathrm{sat}}$ et $\mathrm{d}\tau_{\oplus}$ dû à cette correction après une journée ? Quelle distance la lumière parcourt-elle pendant ce temps ? Que pouvez-vous en conclure ?

> ***Correction.*** Cette fois, on trouve
>
> $$b \simeq 4,468 \cdot 10^{-10}.$$
>
> Ce qui donne
>
> $$\Delta\tau_{\mathrm{sat}} - \Delta\tau_{\oplus} = b\Delta\tau_{\oplus} \simeq 3,86 \cdot 10^{-5}\mathrm{s}.$$
>
> Or, en $\Delta\tau = 3,86 \cdot 10^{-5}\mathrm{s}$, la lumière parcourt une distance $c\Delta\tau \simeq 11,6\mathrm{km}$. Par conséquent, si l'on ne tient pas compte des effets dûs à la Relativité Générale pour synchroniser les horloges embarquées par les satellites avec celles des récepteurs GPS, on accumule une erreur sur la position calculée par le système de $\sim 11,6\mathrm{km}$ par jour !

f. En utilisant Newton, on a utilisé $v_N = r\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau}$ alors qu'il faut utiliser $v = r\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$. Montrer que l'approximation effectuer en (a.) était justifiée.

> ***Correction.*** Nous pouvons écrire
>
> $$v_N = r\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau} = r\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = r\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\left(1 - \frac{2m_{\oplus}}{r}\right) \simeq v\left(1 + \frac{m_{\oplus}}{r} + \ldots\right).$$
>
> Or, que l'on prenne $r = r_{\mathrm{sat}}$ ou bien $r = r_{\oplus}$, on obtient $m_{\oplus}/r \simeq 10^{-10}$. De plus, v apparait toujours au carré dans l'expression de b. Cette correction est donc ici parfaitement négligeable.

***Exercice 3 : thermodynamique des trous noirs.** Cet exercice porte sur des aspects plus avancés des trous noirs, en connexion avec la théorie quantique des champs. Nous allons montrer qu'il est possible d'associer à un trou noir une température et une entropie, la température étant celle du rayonnement thermique de Hawking émis par le trou noir.

En théorie quantique des champs, un système en équilibre thermique à une température donnée T va être caractérisé par des fonctions de Green périodiques en la variable temporelle [1], de période imaginaire $i\beta$ ($\beta \equiv 1/T$). Ceci revient à effectuer la quantification dans un espace euclidien dont la coordonnée temporelle est périodique de période β. Considérons donc la version euclidienne du trou noir de Schwarzschild, obtenue en posant $t = it_E$:

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)\mathrm{d}t_E^2 + \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2 \qquad (c = 1,\ \hbar = 1)$$

a. Montrer que, au voisinage de son horizon, le « trou noir euclidien » possède une topologie $\mathbb{R}^2 \times S^2$ ssi t_E est périodique de période β.

> ***Correction.*** On va développer la métrique autour de l'horizon en posant
>
> $$r = 2MG + \varepsilon$$
>
> Ceci donne la métrique suivante
>
> $$\mathrm{d}s^2 = \frac{\varepsilon}{2MG}\mathrm{d}t_E^2 + \frac{2MG}{\varepsilon}\mathrm{d}\varepsilon^2 + 4M^2G^2\mathrm{d}\Omega^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$
>
> En posant
>
> $$\varepsilon = \frac{\xi^2}{8MG},$$
>
> la métrique prend la forme
>
> $$\mathrm{d}s^2 = \xi^2\mathrm{d}\left(\frac{t_E}{4MG}\right)^2 + \mathrm{d}\xi^2 + 4M^2G^2\mathrm{d}\Omega^2.$$
>
> Ecrite comme cela, on remarque que la métrique prend la forme de la combinaison d'un plan $\mathbb{R}^2$ écrit en coordonnée polaire si on interprète $\frac{t_E}{4MG}$ comme un angle et d'une 2-sphère de rayon $2MG$.

b. Déterminer β.

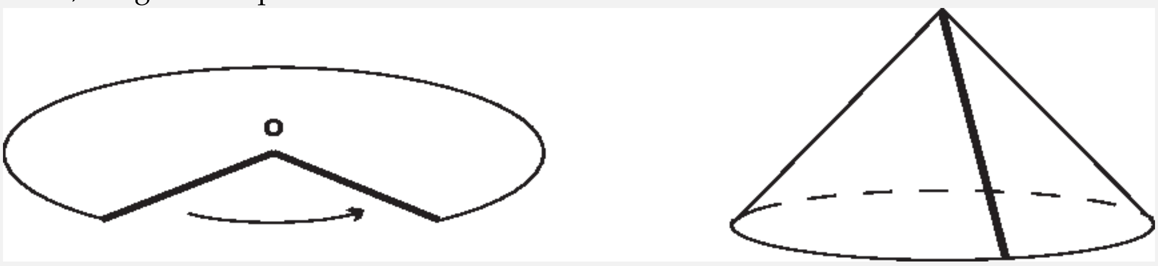
> ***Correction.*** En interprétant $\frac{t_E}{4MG}$ comme un angle, on considère qu'il a une périodicité de 2π. Donc si β est la périodicité de t_E, cette dernière doit valoir
>
> $$\beta = 8\pi MG.$$

1. Une intuition par rapport à ce fait peut être obtenue en considérant la relation entre la fonction de partition à température fixée $Z(\beta) = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta H}$ et l'opérateur quantique d'évolution du système $U(t) = e^{itH}$, où H est l'hamiltonien du système en question.

c. Si la période est différente, montrer qu'on a une singularité conique (et pas ponctuelle).

INDICATIONS : poser $\varepsilon \equiv r - 2MG$ et évaluer la métrique au premier ordre en ε. Déterminer $\xi = \xi(\varepsilon)$ tel que $\xi(0) = 0$ et tel qu'on ait clairement une topologie $\mathbb{R}^2 \times S^2$ au voisinage de l'horizon.

Correction. On peut construire un cône en enlevant un quartier à un cerle et en collant les deux côtés ainsi créés. Mathématiquement on identifie les points sur ces deux segments. Ainsi, l'angle a une période differnte de 2π.



Cette construction forme un point, le sommet du cône où la dérivée ne peut être définie. Cette géométrie n'est donc pas "smooth" en tout point et le sommet est nommé singularité conique.
En conclusion, le seul moyen d'éviter ce genre de singularité est de demander à ce que la période angulaire valent 2π précisemment.

La température naturellement associée au trou noir est donnée par $T = \frac{1}{\beta}$.

d. Déterminer l'entropie $S(M)$ telle que $\mathrm{d}M = T(M)\,\mathrm{d}S(M)$.

Correction. Maintenant que l'on a vu que l'on pouvait associer une température à un trou noir et comme la masse et l'énergie sont deux concepts équivalents, on peut se demander si il n'existe pas un équivalent pour les trous noirs de la 1ère loi de la thermodynamique et si on ne peut pas associer aussi une entropie à nos trous noirs. Pour cela, voyons de quoi devrait dépendre cette entropie.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}M = T(M)\,\mathrm{d}S(M)\\
&\Leftrightarrow \mathrm{d}S(M) = \frac{1}{T(M)}\mathrm{d}M\\
&\Leftrightarrow \mathrm{d}S(M) = 8\pi GM\mathrm{d}M\\
&\Rightarrow S(M) = 4\pi GM^2
\end{aligned}$$

e. Exprimer $S(M)$ en fonction de l'aire de l'horizon du trou noir.

Correction. Comme le rayon de Schwarzschild dépend linéairement de la masse et que l'entropie dépend quadratiquement de celle-ci, on peut relier l'entropie d'un trou noir à l'aire de son horizon.

$$S(M) = 4\pi G M^2 = \frac{4\pi(2MG)^2}{4G} = \frac{A}{4G}$$

Il est intéressant de préciser que ce résultat est vrai pour tout trou noir, qu'il soit chargé, rotatif, asymptopiquement plat, dS ou AdS, en n+1 dimensions, etc. Or, en thermodynamique, vous avez vu que l'entropie est une valeur extensive, c'est-à-dire qu'elle dépend du volume. Ceci fut un des premiers pas qui conduisit vers le *principe holographique*, une conjecture postulant que tout l'information nécessaire pour décrire un espace temps à n dimensions est contenue dans une QFT à n-1 dimensions vivant sur le bord de celui-ci. Mais ceci est une autre histoire.